Durée : 4 heures Deug A 1995

Le problème comporte trois parties. La partie II est indépendante de la partie I. On attire l'attention des candidats sur le fait que même si les résultats de certaines questions de la partie II peuvent être considérés comme des résultats de cours il est demandé de les démontrer. On peut cependant les admettre pour aborder la suite du problème.

On désignera par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers, par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On notera $|x|$ soit la valeur absolue de x si x est réel, soit le module de x si x est complexe. On désignera par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. On notera $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée sur le corps $\mathbb{K}$. Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont deux espaces vectoriels, on notera $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ l'espace vectoriel - sur le même corps que $\mathbb{F}$ - des applications linéaires de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.

PREMIERE PARTIE

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ sur $\mathbb{C}$. Si $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$: on note φ^p la composée de φ, p fois par elle même : $\varphi^p = \varphi \circ ... \circ \varphi$, avec la convention : $\varphi^0 = Id$, où Id est l'application identité de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{E}$; on note $Ker(\varphi)$ le noyau de φ. Si $\mathbb{F}$ est un sous-espace de $\mathbb{E}$ on note $Dim(\mathbb{F})$ sa dimension.

-1) Soit $\mathbf{M}_n$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la forme :

$$\mathbf{M}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{0}_p^q \\ \mathbf{0}_q^p & \mathbf{B}_q \end{bmatrix}$$

Où $\mathbf{A}_p$ est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\mathbf{B}_q$ une matrice de $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$, avec p+q=n ($n \geq 2$, $p \geq 1$, $q \geq 1$) et où $\mathbf{0}_p^q$ et $\mathbf{0}_q^p$ représentent des matrices à respectivement p lignes, q colonnes et q lignes, p colonnes dont tous les coefficients sont nuls. Montrer que le déterminant de $\mathbf{M}_n$ est le produit des déterminants de $\mathbf{A}_p$ et $\mathbf{B}_q$.

-2) Soit $P_1 \neq 0$ et $P_2 \neq 0$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. On désigne par **I** l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ pour lesquels il existe $(A, B) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X]$ tels que $P = AP_1 + BP_2$.

Montrer qu'il existe un polynôme M de **I**, tel que tout élément de **I** soit un multiple de M.

En déduire que si P_1 et P_2 sont premiers entre eux il existe des polynômes R et S de $\mathbb{C}[X]$ tels que :

$$RP_1 + SP_2 = 1.$$

Généraliser ce dernier résultat au cas d'un nombre quelconque de polynômes premiers entre eux dans leur ensemble.

-3) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$. Pour chaque P de $\mathbb{C}[X]$, on pose $P(\varphi) = \sum_{i=0}^{p} a_i \varphi^i$ où p est le degré de P et où a_i est le coefficient du terme de degré i de P.

a) Soit $P\in\mathbb{C}[X]$. Montrer que le noyau et l'image de $P(\varphi)$ sont stables par φ.

b) Soient P et Q deux polynômes premiers entre eux de C[X]. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}[P(\varphi)]\cap\mathrm{Ker}[Q(\varphi)]=\{0\}.$$

En déduire que : $\mathrm{Ker}[P(\varphi)]\oplus\mathrm{Ker}[Q(\varphi)]=\mathrm{Ker}[PQ(\varphi)]$.

c) Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ dont les racines distinctes sont $\lambda_1,...,\lambda_k$ d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1,...,\alpha_k$ ($k\geq1$). Montrer que : $\bigoplus_{i=1}^{k}\mathrm{Ker}[(\varphi-\lambda_i\mathrm{Id})^{\alpha_i}]=\mathrm{Ker}[P(\varphi)]$.

-4) Soit $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$. Soit $\lambda_1,...,\lambda_k$ les valeurs propres distinctes de φ de multiplicité respectives $\alpha_1,...,\alpha_k$. Déduire que la somme des sous-espaces $\mathrm{Ker}[(\varphi-\lambda_i\mathrm{Id})^{\alpha_i}]$, étendue à toutes les valeurs propres distinctes de φ, est directe et égale à $\mathbb{E}$.

Montrer que si $p>\alpha_i$ alors : $\mathrm{Ker}[(\varphi-\lambda_i\mathrm{Id})^{p}]=\mathrm{Ker}[(\varphi-\lambda_i\mathrm{Id})^{\alpha_i}]$

-5) Soit $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$. Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ et $p\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que la suite de sous-espaces $[\mathrm{Ker}[(\varphi-\lambda\mathrm{Id})^{p}]]_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante (pour l'inclusion) et qu'elle est constante à partir d'un certain rang.

b) Pour chaque $\lambda\in\mathbb{C}$, on définit alors le nombre $\nu(\lambda)$ qui est le plus petit entier à partir duquel cette suite est constante. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur λ pour que $\nu(\lambda)=0$.

c) On suppose que $\nu(\lambda)\neq0$. Montrer que l'on peut trouver un élément x de $\mathrm{Ker}[(\varphi-\lambda\mathrm{Id})^{\nu(\lambda)}]$ tel que la famille $((\varphi-\lambda\mathrm{Id})^{0}(x),....,(\varphi-\lambda\mathrm{Id})^{\nu(\lambda)-1}(x))$ soit libre.

En déduire que $\forall\ \lambda\in\mathbb{C}$: $\mathrm{Dim}\{\mathrm{Ker}[(\varphi-\lambda\mathrm{Id})^{\nu(\lambda)}]\}\geq\nu(\lambda)$.

-6) Soit $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$. Soit $\lambda_1,...,\lambda_k$ les valeurs propres distinctes de φ de multiplicité respectives $\alpha_1,...,\alpha_k$. Pour chaque valeur propre λ_i de φ, montrer que :

a) $\alpha_i\geq\nu(\lambda_i)\geq1$.

b) $\mathrm{Dim}\{\mathrm{Ker}[(\varphi-\lambda_i\mathrm{Id})^{\nu(\lambda i)}]\}=\alpha_i$ (On pourra chercher à utiliser le résultat de la question -1))

-7) Soit $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$ et soit λ une des valeurs propres de φ. On appelle " suite de *Jordan* de longueur L associée à λ " un L-uplet $(a_1,..,a_L)$ ($L\geq1$) d'éléments de $\mathbb{E}$ qui vérifient les propriétés suivantes : i) $a_1\neq0$ ii) $(\varphi)(a_1)=\lambda a_1$;

iii) Si $L>1$: $(\varphi)(a_2)=\lambda a_2+a_1,....,(\varphi)(a_L)=\lambda a_L+a_{L-1}$.

a) Montrer que toute suite de Jordan associée à λ est une famille libre de $\mathrm{Ker}[(\varphi-\lambda\mathrm{Id})^{\nu(\lambda)}]$ et que sa longueur est au plus égale à $\nu(\lambda)$. Montrer qu'il existe des suites de Jordan de longueur $\nu(\lambda)$.

b) On suppose qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Ker}[(\varphi-\lambda\mathrm{Id})^{\nu(\lambda)}]$ formée de la réunion d'un nombre fini de suites de Jordan associées à λ.

Montrer que $\mathcal{B}$ contient au moins une suite de Jordan de longueur $\nu(\lambda)$ et que le nombre de suites de Jordan de $\mathcal{B}$ ayant une longueur donnée ne dépend que des dimensions des $\nu(\lambda)$ noyaux : $\mathrm{Ker}[(\varphi-\lambda\mathrm{Id})^{j}]$ (j variant de 1à $\nu(\lambda)$). (On aura intérêt à introduire pour chaque $r\leq\nu(\lambda)$ le sous-espace engendré par les éléments de rang r de toutes les suites et à le caractériser.)

c) Montrer, en précisant sa construction, qu'il existe au moins une base de $\mathrm{Ker}[(\varphi-\lambda\mathrm{Id})^{\nu(\lambda)}]$ formée de la réunion d'un nombre fini de suites de Jordan associées à λ.

d) Soit $p\geq1$ un entier. Montrer que la restriction de φ^p au sous-espace engendré par une suite de Jordan $(\mathbf{a}_1,..,\mathbf{a}_L)$ associée à λ est un endomorphisme de ce sous-espace. Indiquer la forme de sa matrice sur la base $(\mathbf{a}_1,..,\mathbf{a}_L)$.

DEUXIEME PARTIE

On rappelle les définitions suivantes :

i) Un espace normé $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ est complet si toute suite de Cauchy de $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ est convergente dans $\mathbb{E}$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$.

ii) Une partie non vide $\mathbf{A}$ d'un espace normé $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ est compacte pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathbf{A}$ on peut extraire une suite $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ (où l'application $: p \to n_p$ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.) convergente dans $\mathbf{A}$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$.

On rappelle que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ sont des espaces normés complets et que les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ sont des parties compactes de $\mathbb{R}$.

*Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de **dimension finie** $n\geq1$ sur un corps $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K}$ égal $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ une norme sur $\mathbb{E}$. Soit $(e_1,...,e_n)$ une base de $\mathbb{E}$. Pour tout vecteur $v=\sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ on pose $\mathcal{N}(v)=\sup_{i\in\{1,..,n\}} |v$*

-1) Montrer que $\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathbb{E}$. En déduire que l'application qui à tout n-uplet $x=(x_1,...,x_n)$ de nombres réels associe le nombre $\|x\|_n=\sup_{i\in\{1,..,n\}} |x^i|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $\mathbb{I}_1,...,\mathbb{I}_n$ n intervalles fermés de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{D}=\mathbb{I}_1 X... X\mathbb{I}_n$ leur produit cartésien. Montrer que $\mathbb{D}$ est une partie compacte de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_n$ et que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_n)$ est complet.

-2) Soit $(\mathbb{F}, \|\cdot\|_{\mathbb{F}})$ un espace normé. Soit $\mathbf{A}$ une partie compacte non vide de $\mathbb{E}$ pour $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$. Soit f une application continue de $\mathbf{A}$ dans $\mathbb{F}$. Montrer que l'application qui à tout point x de $\mathbb{E}$ associe $\|f(x)\|_{\mathbb{F}}$ est bornée sur $\mathbf{A}$ et y atteint ses bornes.

-3) On suppose que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

a) Pour n≥2, on considère l'application qui à tout (n-1)-uplet $(x_2,...,x_n)$ de nombres réels associe : $\|e_1+\sum_{i=2}^{n} x_i e_i\|_{\mathbb{E}}$. Montrer que cette application possède sur $[-1,1]^{n-1}$ une borne inférieure, m1, strictement positive.

b) En déduire que pour tout n≥1, il existe deux constantes M>0 et m>0 telles que :

$$\forall\, v\in\mathbb{E} :\ m\cdot\mathcal{N}(v)\le \|v\|_{\mathbb{E}}\le M\cdot\mathcal{N}(v)$$

-4) On suppose que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{E}$ est un espace de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et que $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ est une norme sur $\mathbb{E}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

-5) On ne fait plus d'hypothèses sur $\mathbb{K}$. Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{E}$. Déduire de ce qui précède qu'il existe deux constantes $k_1>0$ et $k_2>0$ telles que :

$$\forall\, v\in\mathbb{E} :\ k_1\cdot\|v\|_{\mathbb{E}}\le \|v\|\le k_1\cdot\|v\|_{\mathbb{E}}$$

-6) Soit f une application continue de l'espace normé $(\mathbb{E},\|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ dans un espace normé de dimension finie $(\mathbb{F},\|\cdot\|_{\mathbb{F}})$. Montrer que f est également continue quelque soit les normes de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$. En déduire que l'ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ des applications continues de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ est indépendant des normes choisies dans $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$.

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $(\mathbb{E},\|\cdot\|_{\mathbb{E}})$. Montrer que cette suite est également convergente quelle que soit la norme de $\mathbb{E}$ et que sa limite ne dépend pas de cette norme. En déduire que $(\mathbb{E},\|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ est complet et que, pour tout m≥0, la partie $\{\, v\in\mathbb{E} :\ \|v\|_{\mathbb{E}}\le m\,\}$ est compacte dans $(\mathbb{E},\|\cdot\|_{\mathbb{E}})$

TROISIEME PARTIE

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension n ≥1 sur $\mathbb{C}$ et soit $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ une norme sur $\mathbb{E}$. Soit $(a_p z^p)$ le terme général d'une série entière de rayon de convergence R>0. Soit f(z) sa somme en tout point z où elle converge.

-1) Pour chaque $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$ on pose : $\|\varphi\| = \sup_{\|x\|_{\mathbb{E}}\le 1} \|\varphi(x)\|_{\mathbb{E}}$.

a) Justifier l'existence de $\|\varphi\|$ et montrer que l'application qui à chaque $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$ associe $\|\varphi\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$.

b) Prouver que pour tout $x\in\mathbb{E}$ on a : $\|\varphi(x)\|_{\mathbb{E}}\le\|\varphi\|\cdot\|x\|_{\mathbb{E}}$.

c) Montrer que $\|\varphi\| = \sup_{\|x\|_{\mathbb{E}}=1} \|\varphi(x)\|_{\mathbb{E}}$.

d) Soit φ, ψ deux éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$. Montrer que : $\|\varphi\circ\psi\|\le\|\varphi\|\cdot\|\psi\|$.

-2) Soit $\varphi\in\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$ telle que $\|\varphi\|<R$, où $\|\cdot\|$ est la norme introduite à la question précédente.

a) Montrer que la série de terme général $(a_p\varphi^p)$ est convergente dans $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$. En déduire que pour

tout $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$, l'élément : $\mathrm{Exp}(\varphi) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{\varphi^k}{k!}$ est bien défini dans $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$.

b) Soit φ, ψ deux éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$. Montrer que si φ et ψ commutent alors : $\mathrm{Exp}(\varphi+\psi) = \mathrm{Exp}(\varphi)\circ\mathrm{Exp}(\psi)$.

-3) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$ et soit $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de φ dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{E}$.

a) Montrer que les séries de termes généraux $(a_p\varphi^p)$ et $(a_p\mathbf{M}^p)$ (de $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ respectivement) sont de même nature. En déduire que pour toute matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice $\mathrm{Exp}(\mathbf{A}) = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}$ est bien définie.

b) Si la série de terme général $(a_p\varphi^p)$ est convergente dans $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$ on note $f(\varphi)$ sa somme et on note $f(\mathbf{M})$ la somme de la série de terme général $(a_p\mathbf{M}^p)$. Que représente $f(\mathbf{M})$ pour $f(\varphi)$?

-4) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$.

a) Déduire des résultats de la partie I que si les valeurs propres de φ sont toutes dans le disque : $\{z\in\mathbb{C};\ |z|<R\}$ la série de terme général $(a_p\varphi^p)$ est convergente dans $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$.

b) Réciproquement on suppose que la série de terme général $(a_p\varphi^p)$ est convergente et on note $f(\varphi)$ sa somme. Montrer que pour chaque valeur propre λ de φ, la série de terme général $(a_p\lambda^p)$ est convergente et que $f(\lambda)$ est une valeur propre de $f(\varphi)$. Indiquer alors l'ensemble des valeurs propres de $f(\varphi)$.

-5) Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice symétrique réelle, définie positive. Soit λ la plus grande des valeurs propres de $\mathbf{A}$. On définit la matrice $\mathrm{Log}(\mathbf{A})$ par : $\mathrm{Log}(\mathbf{A}) = \mathrm{Log}(\lambda)\mathbf{I} + \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \frac{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k}{\lambda^k k}$, où $\mathbf{I}$ désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Log}(\lambda)$ le logarithme népérien de λ. Montrer que $\mathrm{Log}(\mathbf{A})$ est bien définie, qu'elle est diagonalisable et indiquer ces valeurs propres.

-6) Montrer que si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice symétrique réelle, définie positive alors : $\mathrm{Exp}(\mathrm{Log}(\mathbf{A})) = \mathbf{A}$. Réciproquement, soit $\mathbf{B}$ une matrice symétrique réelle. Montrer que $\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(\mathbf{B}))$ est bien définie et que $\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(\mathbf{B})) = \mathbf{B}$.

-7) Soit $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ deux matrices symétriques réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, définies positives et vérifiant : $\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\cdot\mathbf{A}_1$. Montrer que $\mathrm{Log}(\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2) = \mathrm{Log}(\mathbf{A}_1) + \mathrm{Log}(\mathbf{A}_2)$.

-8) Soit $\mathbf{M}$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Soit $\mathbf{A} = {}^t\mathbf{M}\cdot\mathbf{M}$, où ${}^t\mathbf{M}$ est la matrice transposée de $\mathbf{M}$. Montrer que la matrice $\mathbf{U} = \mathrm{Exp}(\frac{1}{2}\mathrm{Log}(\mathbf{A}))$ est bien définie et que la matrice $\mathbf{M}\mathbf{U}^{-1}$ est orthogonale.

b) Montrer qu'il existe un unique couple $\mathbf{Q}$, $\mathbf{U}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathbf{M}=\mathbf{Q}\mathbf{U}$ où $\mathbf{Q}$ est une matrice orthogonale et $\mathbf{U}$ une matrice symétrique réelle définie positive.